JEE ADVANCED
27 September 2020
Mathematics Paper - 2

SECTION–1 (Maximum marks :18)

- This section contains **SIX (06)** questions.
- The answer to each questionis a **SINGLE DIGIT INTEGER ranging from 0 TO 9, BOTH INCLUSIVE.**
- For Each Question, enter the correctinteger corresponging to the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

  Full marks : +3 If ONLY the correct integer is entered;

  Zero Marks : 0 If the questio is unanswered.

  Negative Marks : –1 In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, एक एकल अंक पूर्णांक है। दोनों सम्मिलित है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर दर्ज करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर के अनुरूप सही पूर्णांक दर्ज करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +3 केवल सही विकल्प चुना जाता है।

  शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)

  ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.1 For a complex number z, let $\mathrm{Re}(z)$ denote the real part of z. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $z^4-|z|^4=4iz^2$, where $i=\sqrt{-1}$. Then the minimum possible value of $|z_1-z_2|^2$, where $z_1,z_2\in S$ with $\mathrm{Re}(z_1)>0$ and $\mathrm{Re}(z_2)<0$, is

Q.1 एक सम्मिश्र संख्या z के लिये माना $\mathrm{Re}(z)$, z के वास्तविक भाग को निरूपित करता है। माना $z^4-|z|^4=4iz^2$, को सन्तुष्ट करने वाली सभी सम्मिश्र संख्याओ z का समुच्य S है, जहाँ $i=\sqrt{-1}$ है। तब $|z_1-z_2|^2$ का न्यूनतम सम्भावित मान होगा। जहाँ $\mathrm{Re}(z_1)>0$ तथा $\mathrm{Re}(z_2)<0$, के साथ $z_1,z_2\in S$ है –

Ans. **8**

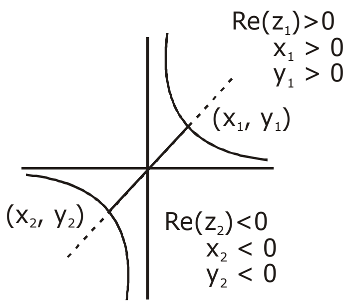
$z^4 - |z|^4 = 4iz^2$

$z^4 - |\bar{z}|^2|z|^2 = 4i\, z^2$

$z^2\,(z^2 - (\bar{z})^2) = 4iz^2$

$z^2 = 0 \,|\, z^2 - (\bar{z})^2 = 4i$

Let z = x + iy



$z^2 - (\bar{z})^2 = 4i$
$(x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 4i$
$xy = 1$
Now $(z_1 - z_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$
$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1 y_2$
$= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2x_1 (-x_2) + 2y_1(-y_2)$
Now AM $\geq$ GM
$\geq 8(x_1^2\, x_2^2\, y_1^2 y_2^2\, x_1\, x_2\, y_1\, y_2)^{1/8}$
≥ 8

Q.2 The probability that a missile hits a target successfully is 0.75 . In order to destroy the target completely, at least three successful hits are required. Then the minimum number of missiles that have to be fired so that the probability of completely destroying the target is NOT less than 0.95, is

Q.2 एक मिसाइल द्वारा सफलता पूर्वक लक्ष्म पर मारने की प्रायिकता 0.75 है। लक्ष्य को पूरी तरह नष्ट करने के लिए कम से कम तीन सफल मार की आवश्यकता है, तब मिसाइलों की न्यूनतम संख्या, जिनको दागा जाता है। ताकि लक्ष्य को सम्पूर्ण नष्ट करने की प्रायिकता 0.95 से कम न हो, होगी।

Ans. 6

P(Hit) = 0.75 = 3/4 & P(Hitnot) = 0.25 = 1/4
P(targel Hit) $\geq$ 0.95
1 - P (tagent not hit in n throws) $\geq$ 0.95

$$1 - {}^nC_0\left(\bar{H}\right)^n - {}^nC_1\left(\bar{H}\right)^{n-1}.(H) - {}^nC_2\left(\bar{H}\right)^{n-2}(H)^2 \geq 0.95$$

$$1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n - n.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.\frac{3}{4} - \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0.95$$

$$1 - 0.95 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^n\left[\frac{9n^2 - 3n + 2}{2}\right]$$

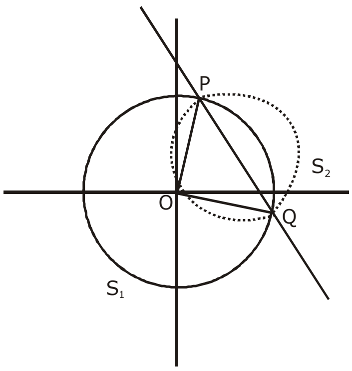
$$\left[9n^2 - 3n + 2\right] \leq \frac{4^n}{10}$$

Now check n = 6

Q.3 Let O be the centre of the circle $x^2 + y^2 = r^2$, where $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$. Suppose PQ is a chord of this circle and the equation of the line passing through P and Q is $2x + 4y = 5$. If the centre of the circumcircle of the triangle OPQ lies on the line $x + 2y = 4$, then the value of r is

Q.3 माना O वत्त $x^2 + y^2 = r^2$, का केन्द्र है जहाँ $r > \frac{\sqrt{5}}{2}$ है। माना PQ इस वत्त की एक जीवा है तथा P एवं Q से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $2x + 4y = 5$ है। यदि त्रिभुज OPQ के परिवत्त का केन्द्र रेखा $x + 2y = 4$, पर स्थित है, तब r का मान होगा।

Ans. **2**



$S_1 : x^2 + y^2 = r^2$ whre $r > \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

now let $S_2 : x^2 + y^2 + ax + by = 0 \Rightarrow C_2; \left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{-b}{2}\right)$

RA of $S_1 = 0$ & $S_2 = 0$ is PQ
PQ : RA : $S_1 - S_2 = 0$
PQ : $ax + by + r^2 = 0$
Given PQ : $2x + 4y - 5 = 0$

$\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{r^2}{-5}$ .....(1)

also centre of S_2 lies on $x + 2y = 4$

$\Rightarrow \dfrac{-a}{2} - b = 4$ ....(2)

from (1) & (2)

$\dfrac{-r^2}{-5} - \dfrac{4r^2}{-5} = 4$

$-5r^2 = -2o$
$r^2 = 4$
$r = 2$

Q.4 The trace of a square matrix is defined to be the sum of its diagonal entries. If A is a 2×2 matrix such that the trace of A is 3 and the trace of A^3 is -18 , then the value of the determinant of A is

Q.4 एक वर्ग आवयुह का अनुरेखण, इसके विकर्ण के अवयवो के योगफल को परिभाषित करता है। यदि A एक 2×2 का आव्युह इस प्रकार है कि A का अनुरेखण 3 है तथा A^3 का अनुरेखण –18 है, तब A के सारणिक का मान होगा –

Ans. 5

Let $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \Rightarrow T_r(A)=3$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3-a\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix} a^2+bc & 3b \\ 3c & cb+(3-a)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & 3-a\end{bmatrix}$

$T_r(A^3) = a^3 + abc + 3bc + 3bc + 3bc +(3-a)^2 3 - abc - a(3-a)^2$

$-18 = a^3 + 9bc + (3-a)^3$

$\Rightarrow a^3 + 9bc + 27 - a^3 - 3.3a(3 - a) = -18$

$\Rightarrow a^2 - 3a + bc = -5$

Now $|A| = a(3 - a) - bc$

$= 3a - a^2 - bc$

$|A| = 5$

Q.5 Let the functions $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ and $g:(-1,1)\to(-1,1)$ be defined by

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$ and $g(x)=x-[x]$

where [x] denotes the greatest integer less than or equal to x. Let fog $:(-1,1)\to\mathbb{R}$ be the composite function defined by (fog)(x) = f(g(x)). Suppose c is the number of points in the interval (-1,1) at which fog is NOT continuous, and suppose d is the number of points in the interval (-1,1) at which fog is NOT differentiable. Then the value of $c+d$ is

Q.5 माना फलन $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ तथा $g:(-1,1)\to(-1,1)$,

$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$ तथा $g(x)=x-[x]$ के द्वारा परिभाषित है, जहाँ [x], x से छोटे या बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है। माना fog $:(-1,1)\to\mathbb{R}$ एक संयुक्त फलन है जो (fog)(x) = f(g(x)) के द्वारा परिभाषित है। माना c अंतराल (–1,1) में बिन्दुओ की संख्या है जिस पर Fog संतत नही है तथा माना d अंतराल (–1,1) में बिन्दुओ की संख्या है जिस पर fog अवकलनीय नही है, तब $c+d$ का मान होगा।

Ans. 4

$f(x) = |2x - 1| + |2x + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ -4x & x \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$g(x) = x - [x] = \{x\}$

$$\text{Now fog} = \begin{cases} 4g(x) & g(x) \geq \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-1}{2} < g(x) < \frac{1}{2} \\ -4g(x) & g(x) \leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \begin{cases} 4\{x\} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 4\{x\} & \frac{-1}{2} \leq x < 0 \\ 2 & -1 < x < \frac{-1}{2} \\ 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{fog} = \begin{cases} 4x & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 4(x+1) & \frac{-1}{2} \leq x < 0 \\ 2 & -1 < x < \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Now check
fog is not continuous at x = 0 only.

fog is not differentiable at x = $\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$

c = 1 & d = 3
c + d = 4

Q.6 The value of the limit

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}(\sin 3x + \sin x)}{\left(2\sin 2x \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{5x}{2}\right) - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos 2x + \cos\frac{3x}{2}\right)}$$ is

Q.6 सीमा $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}(\sin 3x + \sin x)}{\left(2\sin 2x \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{5x}{2}\right) - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos 2x + \cos\frac{3x}{2}\right)}$ का मान है –

Ans. **8**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}\left(\sin 3x + \sin x\right)}{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \sqrt{2}.2\cos^2 x - \cos\frac{3x}{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4\sqrt{2}\sin 2x \cos x}{2\sin x \sin\frac{x}{2} + 2\sin 3x . \sin\frac{x}{2} - 2\sqrt{2}\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\sin x \cos^2 x}{2\sin\frac{x}{2}\left\{2\sin 2x.\cos x\right\} - 2\sqrt{2}\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{16\sqrt{2}\sin x}{2.4\sin\frac{x}{2}\sin x - 2\sqrt{2}}$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{8.\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{32}{8-4} = \frac{32}{4} = 8$$

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- Section contains **SIX (06)** questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer the each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks	: +4	If only (all the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks	: +3	If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks	: +2	If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks	: +1	If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –2	In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक	: +3	यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक	: +2	यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक	: +1	यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक	: –2	अन्य सभी स्थितियों में।

Q.7 Let b be a nonzero real number. Suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a differentiable function such that $f(0)=1$ If the derivative f' of f satisfies the equation

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}$ for all $x\in\mathbb{R}$, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) If $b>0$, then f is an increasing function

(B) If $b<0$, then f is a decreasing function

(C) $f(x)f(-x)=1$ for all $x\in\mathbb{R}$

(D) $f(x)-f(-x)=0$ for all $x\in\mathbb{R}$

Q.7 माना b एक अशून्य वास्तविक संख्या है। माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f(0)=1$ है। यदि f का अवकलज f' जो सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए समीकरण

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}$ को सन्तुष्ट करता है, तब निम्नलिखित कथनों में से कौनसा सत्य है।

(A) यदि $b>0$ है, तब f एक वर्धमान फलन है।

(B) यदि $b<0$ है, तब f एक ह्रासमान फलन है।

(C) सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $f(x)f(-x)=1$ है।

(D) सभी $x\in\mathbb{R}$ के लिए $f(x)-f(-x)=0$ है।

Ans. **A,C**

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{b^2+x^2}dx$$

$$\ln(f(x))=\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+c$$

put $x=0\Rightarrow c=0$

(A) $f(x)=e^{\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}$

$f(x)>0\ \forall\ x\in R\quad\because f'(x)=\dfrac{f(x)}{b^2+x^2}>0\Rightarrow f(x)\uparrow$

(C) $f(x)\,f(-x)=e^{\left(\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}=e^0=1$

(D) $f(x)-f(-x)=e^{\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}-e^{-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)}$

for all $x\in R\neq 0$

Q.8 Let a and b be positive real numbers such that $a>1$ and $b<a$. Let P be a point in the first quadrant that lies on the hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Suppose the tangent to the hyperbola at P passes through the point $(1,0)$, and suppose the normal to the hyperbola at P cuts off equal intercepts on the coordinate axes. Let Δ denote the area of the triangle formed by the tangent at P, the normal at P and the x-axis. If e denotes the eccentricity of the hyperbola, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $1<e<\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}<e<2$ (C) $\Delta=a^4$ (D) $\Delta=b^4$

Q.8 माना a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याए इस प्रकार है कि $a > 1$ तथा $b < a.$ है। माना P प्रथम चतुर्थाश में एक बिन्दु है जो अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित है। माना P पर अतिपरवलय की स्पर्शरेखा बिन्दु $(1, 0),$ से गुजरती है तथा माना P पर अतिपरवलय का अभिलम्ब निर्देशी अक्षो पर समान अंतखण्ड काटती है। माना Δ, P पर स्पर्शरेखा, P पर अभिलंब तथा x-अक्ष द्वारा बने त्रिभुज के क्षेत्रफल को निरूपित करता है। यदि e अतिपरवलय की उत्केन्द्रता को व्यक्त करती है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है –

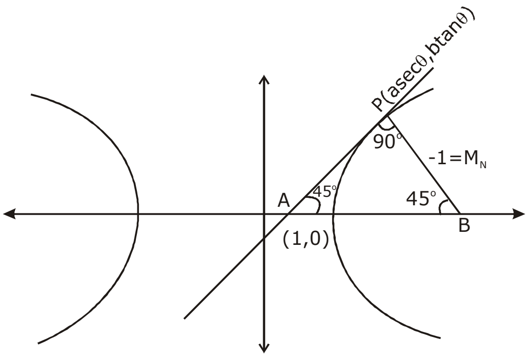
(A) $1 < e < \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} < e < 2$ (C) $\Delta = a^4$ (D) $\Delta = b^4$

Ans. **A,D**

$\because$ normal cuts euqal Intercepts

$\therefore$ $M_N = -1$

$M_T = 1$



T at P $\Rightarrow \frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$

pass (1, 0)

$\sec\theta = a$

$\because$ $M_T = 1 \Rightarrow +\left(\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}\right) = 1 \Rightarrow b = \tan\theta$

$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow e^2 - 1 = \sin^2\theta \Rightarrow e^2 = 1 + \sin^2\theta$ $(\because 0 < \theta < \pi/2)$

$1 < e^2 < 2 \Rightarrow 1 < e < \sqrt{2}$

Area $\Delta = \frac{1}{2}(AP)(AP)$ $\because AP = BP$

$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \sec^2\theta\right)^2 + \left(\tan^2\theta\right)^2\right] = \tan^4\theta = b^4$

Q.9 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be functions satisfying

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ and $f(x)=xg(x)$

for all $x,y\in\mathbb{R}$. If $\lim_{x\to 0} g(x)=1,$ then which of the following statements is/are TRUE?

(A) f is differentiable at every $x\in\mathbb{R}$

(B) If $g(0)=1,$ then g is differentiable at every $x\in\mathbb{R}$

(C) The derivative $f'(1)$ is equal to 1

(D) The derivative $f'(0)$ is equal to 1

Q.9 माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ तथा $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ फलन है। जो सभी $x,y\in\mathbb{R}.$ के लिए

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ तथा $f(x)=xg(x)$ को सन्तुष्ट करते है। यदि $\lim_{x\to 0} g(x)=1,$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) f प्रत्येक $x\in\mathbb{R}$ पर अवकलनीय है।

(B) यदि $g(0)=1,$ है, तब g प्रत्येक $x\in\mathbb{R}$ पर अवकलनीय है।

(C) अवकलज $f'(1)$, 1 के बराबर है।

(D) अवकलज $f'(0)$, 1 के बराबर है।

Ans. **A,B,D**

f'(x + y).1 = f'(y) + f(x) f'(y)
put y = 0
f'(x) = f'(0) + f(x)f'(0)
xg'(x) + g(x) = f'(0) + f(x). f'(0)
xg'(x) + g(x) = 1 + f(x)
f'(x) = f(x) + 1
f(0) = f'(0) + 1
f(0) = 0
f(1) = f(1) + 1

g(0) = 1
f'(x) = xg'(x) + g(x)
f'(0) = g(0) = 1

$$\int \frac{f(x)}{f(x)+1}dx = \int dx$$

$\Rightarrow$ ln(f(x) + 1) = x + c
put x = 0
c = 0
f(x) = e^x - 1
f(1) = e - 1
f'(1) = f(1) + 1 = e - 1 + 1 = e

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$

we have check differentiability at x = 0

g'(0⁺) = $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x - 1 - 1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$

g'(0⁻) = $\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^{-x} - 1}{-x} - 1}{-x}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

g(x) is aiarecate for dex

M-II

to find function

f'(x) = $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x) + f(h) + f(x)f(x) - f(x)}{h}$

f'(x) = (f(x)+1)$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}$

= (f(x) + 1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{h\ g(h)}{h}$

f'(x) = f(x) + 1

Q.10 Let $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ be real numbers such that $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ and $\alpha + \gamma = 1$. Suppose the point (3,2,-1) is the mirror image of the point (1,0,-1) with respect to the plane $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$. Then which of the following statements is/are TRUE?

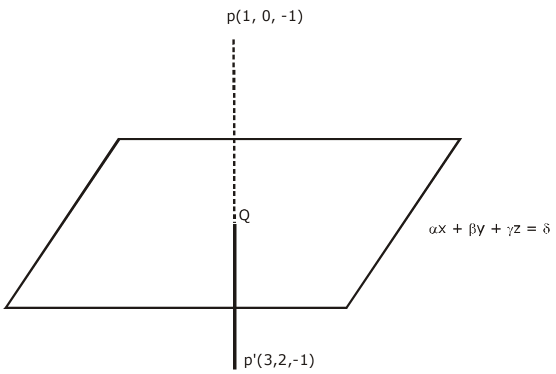
(A) $\alpha + \beta = 2$ (B) $\delta - \gamma = 3$ (C) $\delta + \beta = 4$ (D) $\alpha + \beta + \gamma = \delta$

Q.10 माना $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ वास्तविक संख्याएं इस प्रकार है कि $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$ तथा $\alpha+\gamma=1.$ है। माना बिन्दु (3,2,-1) समतल $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ के सापेक्ष बिन्दू (1,0,-1) का दर्पण प्रतिबिम्ब है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) $\alpha+\beta=2$ (B) $\delta-\gamma=3$ (C) $\delta+\beta=4$ (D) $\alpha+\beta+\gamma=\delta$

Ans. **A,B,C**

pp' is normal to given plane



$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{0}=\lambda(\text{let})$$

$\alpha=\beta, \gamma=0$

$\therefore \alpha+\gamma=1 \Rightarrow \alpha=1=\beta$

$\alpha+\beta=2$

Q pt is mid pt of pp' = (2, 1, -1)

lie on plane

$2\alpha+\beta-\gamma=\delta$

put α, β, γ

$\delta=3$

$\delta-\gamma=3$

$\delta+\beta=4$

$\alpha+\beta+\gamma=2 \neq \delta$

Q.11 Let a and b be positive real numbers. Suppose $\overrightarrow{PQ}=a\hat{i}+b\hat{j}$ and $\overrightarrow{PS}=a\hat{i}-b\hat{j}$ are adjacent sides of a parallelogram PQRS .Let $\vec{u}$ and $\vec{v}$ be the projection vectors of $\vec{w}=\hat{i}+\hat{j}$ along $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{PS}$, respectively. If $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{w}|$ and if the area of the parallelogram PQRS is 8, then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) $a+b=4$

(B) $a-b=2$

(C) The length of the diagonal PR of the parallelogram PQRS is 4

(D) $\vec{w}$ is an angle bisector of the vectors $\overrightarrow{PQ}$ and $\overrightarrow{PS}$

Q.11 माना a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना $\overrightarrow{PQ}=a\hat{i}+b\hat{j}$ तथा $\overrightarrow{PS}=a\hat{i}-b\hat{j}$ एक समान्तर चतुर्भुज PQRS की आसन्न भुजाएँ है। माना $\vec{u}$ तथा $\vec{v}$ क्रमशः $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{PS}$, के अनुदिश $\vec{w}=\hat{i}+\hat{j}$ का प्रक्षेप सदिश है । यदि $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{w}|$ है तथा यदि समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल 8 है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ,

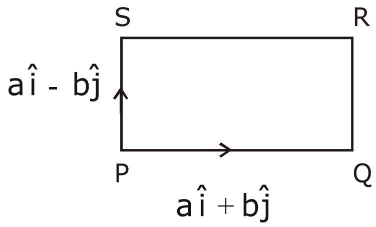
(A) $a+b=4$

(B) $a-b=2$

(C) समान्तर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR की लम्बाई 4 है।

(D) $\vec{w}$ सदिशो $\overrightarrow{PQ}$ तथा $\overrightarrow{PS}$ का एक कोण अर्द्धक है।

Ans. **A,C**



$$\vec{u} = \frac{\vec{w}.\,\overrightarrow{PQ}}{|PQ|}$$

$$= \frac{(\hat{i}+\hat{j}).(a\hat{i}+b\hat{j})}{|a\hat{i}+b\hat{j}|}$$

$$= \frac{(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{v} = \frac{(\vec{w}).\overrightarrow{ps}}{|\overrightarrow{ps}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}).(a\hat{i}-b\hat{j})}{|a\hat{i}-b\hat{j}|} = \frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{w}|$$

$$\frac{(a+b)|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b}) = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 2a = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$2a^2 = 2b^2$

$a = b$

Area of parallelogram = $\left\|\begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 0 \\ a & -b & 0 \end{matrix}\right\|$

$$\Rightarrow |-2ab\hat{k}| = 8$$

$ab = 4 \Rightarrow a^2 = 4$

$a = 2 = b$

$a + b = 4$

$a - b = 0$

Length of diagonal of parallelogram = $\left|\left(a\hat{i}+b\hat{j}\right)+\left(a\hat{i}-b\hat{j}\right)\right|$

= 2a = 4

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}=2a\hat{i},2b\hat{j}\neq\lambda\overrightarrow{w}$

Q.12 For nonnegative integers s and r, let

$$\binom{s}{r}=\begin{cases}\dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if } r\le s\\ 0 & \text{if } r>s\end{cases}$$

For positive integers m and n, let

$$g(m,n)=\sum_{p=0}^{m+n}\frac{f(m,n,p)}{\binom{n+p}{p}}$$

where for any nonnegative integer p,

$$f(m,n,p)=\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+i}{p}\binom{p+n}{p-i}$$

Then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $g(m,n)=g(n,m)$ for all positive integers m, n

(B) g(m, n+1)=g(m+1, n) for all positive integers m, n

(C) g(2m, 2n)=2 g(m, n) for all positive integers m, n

(D) g(2m, 2n)=(g(m, n))^2 for all positive integers m, n

Q.12 अ़ऋणात्मक पूर्णांक s तथा r के लिए माना

$$\binom{s}{r}=\begin{cases}\dfrac{s!}{r!(s-r)!} & \text{if } r\le s\\ 0 & \text{if } r>s\end{cases} \text{ है।}$$

धनात्मक पूर्णांक m तथा n के लिए माना

$$g(m,n)=\sum_{p=0}^{m+n}\frac{f(m,n,p)}{\binom{n+p}{p}} \text{ है।}$$

जहाँ किसी अ़ऋणात्मक पूर्णांक p के लिए

$$f(m,n,p)=\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+i}{p}\binom{p+n}{p-i}$$

है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) $g(m,n)=g(n,m)$ सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(B) g(m, n+1)=g(m+1, n) सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(C) g(2m, 2n)=2 g(m, n) सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

(D) g(2m, 2n)=$(g(m, n))^2$ सभी धनात्मक पूर्णांक m, n के लिए है।

Ans. **A,B,D**

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \cdot {}^{n+i}C_p \cdot {}^{n+p}C_{p-i}$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \frac{\lfloor n+i}{\lfloor p \lfloor n+i-p} \cdot \frac{\lfloor n+p}{\lfloor p-i \lfloor n+i}$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \cdot \left(\frac{\lfloor n+p}{\lfloor p \cdot \lfloor n}\right)\left(\frac{\lfloor n}{\lfloor n+i-p \lfloor p-i}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{p} {}^{m}C_i \left({}^{n}C_{p-i}\right)\left({}^{n+p}C_p\right)$$

$\Rightarrow {}^{n+p}C_p\ [{}^{m}C_0 \cdot {}^{n}C_p + {}^{m}C_1 {}^{n}C_{p-1} + \ldots + {}^{m}C_m {}^{n}C_{p-m}]$

coffi x^p in $(1 + x)^n (x+1)^m$

$f(m,n,p) = ({}^{n+p}C_p)\ ({}^{m+n}C_p)$

$$g(m,n) = \sum_{p=0}^{m+n} {}^{m+n}C_p = 2^{m+n}$$

$g(m, n) = g(n,m)$

$g(2m, 2n) = 2^{2(m+n)} = (2^{m+n})^2 = (g(m,n))^2$

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions. The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE**.
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal places.
- Answer the each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;

Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।

  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

Q.13 An engineer is required to visit a factory for exactly four days during the first 15 days of every month and it is mandatory that no two visits take place on consecutive days. Then the number of all possible ways in which such visits to the factory can be made by the engineer during $1-15$ June 2021 is

Q.13 एक अभियता को प्रत्येक महिने के पहले 15 दिनो के दौरान ठीक चार दिनो के लिए एक कारखाने का दौरा करना आवश्यक है तथा यह अनिवार्य है कि लगातार दो दिन कोई यात्रा न हो, तब सभी सम्भावित तरिको की संख्या जिसमें कारखाने में इस तरह के दौरे अभियंता द्वारा $1-15$ जून 2021 के दौरान किये जा सकते है, होगी।

Ans. **495.00**

To select = 4 days

not selected days = 11 days

gaps = 12

$$\therefore {}^{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 5 \times 9}{24} = 495$$

Q.14 In a hotel, four rooms are available. Six persons are to be accommodated in these four rooms in such a way that each of these rooms contains at least one person and at most two persons. Then the number of all possible ways in which this can be done is

Q.14 एक होटल में चार कमरे उपलब्ध है। इन चार कमरो में छः व्यक्तियो को इस प्रकार समायोजित करते है। इनमें से प्रत्येक कमरे में कम से कम एक व्यक्ति तथा अधिकतम दो व्यक्ति हो। तब सभी सम्भावित तरिको की संख्या जिसमें यह किया जा सकता है, होगी।

Ans. **1080.00**

by grouping

$$6 \begin{array}{l} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 2 \end{array}$$

$$\therefore \frac{6!}{1!1!2!2!2!2!} \times 4!$$

$$\Rightarrow \frac{720}{2 \times 2 \times 2 \times 2} \times 24$$

= 1080

Q.15 Two fair dice, each with faces numbered 1,2,3,4,5 and 6, are rolled together and the sum of the numbers on the faces is observed. This process is repeated till the sum is either a prime number or a perfect square. Suppose the sum turns out to be a perfect square before it turns out to be a prime number. If p is the probability that this perfect square is an odd number, then the value of 14 p is

Q.15 दो उचित पासे, जिसकी प्रष्ठ संख्या 1,2,3,4,5 तथा 6, है प्रत्येक को एक साथ लुडकाया जाता है तथा प्रष्ठों पर संख्याओं के योगफल का निरिक्षण किया जाता है। यह प्रक्रिया तब दोहराई जाती है, जब तक कि योग एक अभाज्य संख्या या एक पूर्ण वर्ग न हो। माना योग एक अभाज्य संख्या उपस्थित होने के पहले एक पूर्ण होता है। यदि P प्रायिकता है कि इसका पूर्ण वर्ग एक विषम संख्या है, तब 14 p का मान होगा –

Ans. **8.00**

Sum is prime =

2 (1,1)

3 (1,2)(2,1)

5 (2,3)(3,2) (1,4) (4,1)

7 (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)

11 (5,6) (6,5)

P(prime) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Q.16 Let the function $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined by $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ Then the value of

$f\left(\frac{1}{40}\right)+f\left(\frac{2}{40}\right)+f\left(\frac{3}{40}\right)+\cdots+f\left(\frac{39}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ is

Q.16 माना फलन $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ के द्वारा परिभाषित है,तब

$f\left(\frac{1}{40}\right)+f\left(\frac{2}{40}\right)+f\left(\frac{3}{40}\right)+\cdots+f\left(\frac{39}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान होगा –

Ans. **19.00**

f : [0, 1] $\to$ R

f(x) = $\frac{4^x}{4^x+2}$

f(1 - x) = $\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} = \frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}$

= $\frac{4}{4+2.4^x}$

$\Rightarrow \frac{2}{2+4^x}$

$\therefore$ f(x) + f(1-x) = 1

$$f\left(\frac{1}{40}\right)+f\left(\frac{2}{40}\right)+......+f\left(\frac{39}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \text{ 19 pairs + } f\left(\frac{20}{40}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right) = 19$$

Q.17 Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be a differentiable function such that its derivative f' is continuous and $f(\pi)=-6$

If $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ is defined by $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ and if

$\int_0^\pi \left(f'(x)+F(x)\right)\cos x dx = 2$ then the value of $f(0)$ is

Q.17 माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि इसका अवकलज f' संतत् है तथा $f(\pi)=-6$ है। यदि

$F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt,$ के द्वारा परिभाषित है तथा यदि

$\int_0^\pi \left(f'(x)+F(x)\right)\cos x dx = 2$ है। तब f(0) का मान होगा –

Ans. **4.00**

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

f'(x) = f(x)

$$\int_0^\pi f'(x)\cos x\ dx + \int_0^\pi \underset{\mathrm{I}}{f(x)}\underset{\mathrm{II}}{\cos x}dx$$

$$\int_0^\pi f'(x)\cos x\ dx + f(x)\sin x)_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\sin x\ dx$$

$$\int_0^\pi \left(f'(x)\cos x - f(x)\sin x\right)dx$$

$$\int_0^\pi \frac{d}{dx}\left(f(x)\cos x\right)dx = 2$$

$$f(x)\cos x\Big|_0^\pi = 2$$

f(π) (-1) - f(0) = 2

6 - f(0) = 2

f(0) = 4

Q.18 Let the function $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ be defined by $f(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^4$.

Suppose the function f has a local minimum at θ precisely when $\theta\in\{\lambda_1\pi,\ldots,\lambda_r\pi\}$, where $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_r<1$. Then the value of $\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ is

Q.18 माना फलन $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^4$ के द्वारा परिभाषित है।

माना फलन f, θ पर ठीक ठीक एक स्थानिय निम्निष्ठ रखता है। जब $\theta\in\{\lambda_1\pi,\ldots,\lambda_r\pi\}$, है जहाँ $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_r<1$. है। तब $\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ का मान है।

Ans. **0.50**

$f(\theta) = (1 + \sin2\theta) + (1 - \sin2\theta)^2$

$= 1 + \sin2\theta + 1 + \sin^2 2\theta - 2\sin2\theta$

$= \sin^2 2\theta - \sin2\theta + 2$

$$= \left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$\theta \in [0, \pi]$

$\therefore 2\theta \in [0, 2\pi]$

$f(\theta)$ min. when $\sin2\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{12}$ $\qquad$ $\lambda_2 = \frac{5}{12}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} = 0.50$