JEE ADVANCED
27 September 2020
Mathematics Paper - 1

SECTION 1 (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONLY ONE** of these four options is the correct answer.
- For each question, choose the option corresponding to the correct answer.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks	: +3	If ONLY the correct option is chosen;
Zero Marks	: 0	If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks	: –1	In all other cases.

भाग -1 (अधिकतम अंक: 18)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से केवल एक ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	: +3	केवल सही विकल्प चुना जाता है।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है। (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)
ऋणात्मक अंक	: –1	अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. Suppose a,b denote the distinct real roots of the quadratic polynomial $x^2 + 20x - 2020$ and suppose c,d denote the distinct complex roots of the quadratic polynomial $x^2 - 20x + 2020$. Then the value of $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$ is

(A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000

1. माना a,b द्विघात बहुपद $x^2 + 20x - 2020$ के भिन्न–भिन्न वास्तविक मूल को दर्शाते है तथा माना c,d द्विघात बहुपद $x^2 - 20x + 2020$ के भिन्न–भिन्न सम्मिश्र मूल को दर्शाते है। तब $ac(a-c) + ad(a-d) + bc(b-c) + bd(b-d)$ का मान है –

(A) 0 (B) 8000 (C) 8080 (D) 16000

Ans. D

a

$x^2 + 20x - 2020 = 0$

b

$a + b = -20$ & $a.b = -2020$

c

& $x^2 - 20x + 2020 = 0$

d

$c + d = 20$ & $c.d = 2020$

Now

$= ac(a - c) + ad(a - d) + bc(b - c) + bd(b - d)$

$= a^2(c + d) + b^2(c + d) - c^2(a + b) - d^2(a + b)$

$= (a^2 + b^2)(c + d) - (a + b)(c^2 + d^2)$

$= ((a+b)^2 - 2ab)((c + d) - (a + b)((c + d)^2 - 2cd)$

$= ((400 + 4040)(20) - (-20)((20)^2 - 4040)$
$= 20[4440 - 3640]$
$20[800] = 16000$

2. If the function $f:R \to R$ is defined by $f(x) = |x|\,(x - \sin x)$, then which of the following statements is TRUE ?

(A) f is one-one, but NOT onto
(B) f is onto, but NOT one-one
(C) f is BOTH one-one and onto
(D) f is NEITHER one-one NOR onto

2. यदि फलन $f:R \to R$, $f(x) = |x|\,(x - \sin x)$, के द्वारा परिभाषित है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) f एकेकी है लेकिन आच्छादक नही है।
(B) f आच्छादक है लेकिन एकेकी नही है।
(C) f एकेकी तथा आच्छादक दोनो है।
(D) f ना तो एकेकी ना आच्छादक है।

Ans. C

$f(x) = |x|(x - \sin x)$

$f(-x) = -(|x|(x - \sin x))$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ is odd

$\Rightarrow R_f = R = c.d_f =$ onto

Now

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \sin x - x\cos x & x \geq 0 \\ -2x + \sin x + x\cos x & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall \ x \in R$

$\Rightarrow$ f is one - one

3. Let the functions $f:R \to R$ and $g:R \to R$ be defined by

$f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$ and $g(x) = \frac{1}{2}\,(e^{x-1} + e^{1-x})$.

Then the area of the region in the first quadrant bounded by the curves $y = f(x)$, $y = g(x)$ and $x = 0$ is.

(A) $(2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$
(B) $(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e - e^{-1})$
(C) $(2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$
(D) $(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(e + e^{-1})$

3. माना फलन $f:R \rightarrow R$ तथा $g:R \rightarrow R, f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$ तथा $g(x) = \frac{1}{2}(e^{x-1}+e^{1-x})$ के द्वारा परिभाषित है। तब वक्रो $y = f(x)$, $y = g(x)$ तथा $x = 0$ द्वारा परिबद्ध प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा –

(A) $(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})$ (B) $(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e-e^{-1})$

(C) $(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e+e^{-1})$ (D) $(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(e+e^{-1})$

Ans. A

$f(x) = e^{x-1} - e^{-|x-1|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - e^{-(x-1)} & x \geq 1 \\ e^{x-1} - e^{(x-1)} = 0 & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$\&\ g(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right)$

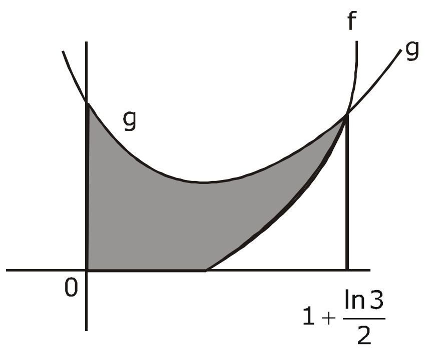
Now $f(x) = g(x)$

$e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right)$

$2e^{x-1} - \frac{2}{e^{x-1}} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}$

$e^{x-1} - \frac{3}{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^{x-1} = \sqrt{3}$

$x = 1 + \frac{\ln 3}{2}$



$$\text{Area} = \int_0^1 \left(g(x) - 0\right) + \int_1^{1+\frac{\ln 3}{2}} \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right) + \int_1^{1+\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}\right) - \left(e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}}\right) dx$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2} + 2 - \sqrt{3}$$

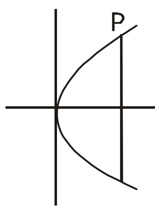
4. Let a, b and λ be positive real numbers. Suppose P is an end point of the latus rectum of the parabola $y^2 = 4\lambda x$, and suppose the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passes through the point P. If the tangents to the parabola and the ellipse at the point P are perpendicular to each other, then the eccentricity of the ellipse is.

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

4. माना a, b तथा λ धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना P परवलय $y^2 = 4\lambda x$ के आभिलम्ब का एक अंत बिंदू है तथा माना दीर्घवत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ बिन्दू P से गुजरता है। यदि बिन्दू P पर परवलय तथा दीर्घवत्त की स्पर्श रेखाएं एक दूसरे के लम्बवत है, तब दीर्घवत्त की उत्केन्द्रता होगी –

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$

Ans. **A**



$P(\lambda, 2\lambda)$

Now E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Passes through P

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{4\lambda^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \ldots(1)$$

Now $m_T\Big|_p^{P_{ar}} - m_T\Big|_p^{E} = 1$

$$\left.\frac{2\lambda}{y}\right|_p \times -\left.\frac{x}{a^2}\cdot\frac{b^2}{y}\right|_p = -1$$

$$\frac{2\lambda}{2\lambda}x - \frac{\lambda}{a^2}\cdot\frac{b^2}{2\lambda} = -1$$

$b^2 = 2a^2$

for ecc. of ellipse

$$e = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5. Let C_1 and C_2 be two biased coins such that the probabilities of getting head in a single toss are $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{3}$, respectively. Suppose α is the number of heads that appear when C_1 is tossed twice, independently, and suppose β is the number of heads that appear when C_2 is tossed twice, independently. Then the probability that the roots of the quadratic polynomial $x^2 - \alpha x + \beta$ are real and equal, is

(A) $\frac{40}{81}$ (B) $\frac{20}{81}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

5. माना C_1 तथा C_2 दो अनिष्पक्ष (Bised) सिक्के इस प्रकार है कि एक अकेली उछाल में चिट प्राप्त करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{1}{3}$ है। माना α चिटो की संख्या है जो उपस्थित होती है जब C_1 स्वतंत्र रूप से दो बार उछाला जाता है तथा माना β चिटो की संख्या है जो उपस्थित होती है। जब C_2 स्वतंत्र रूप से दो बार उछाला जाता है। तब द्विघात बहुपद $x^2 - \alpha x + \beta$ के मूल वास्तविक तथा समान है की प्रायिकता है।

(A) $\frac{40}{81}$ (B) $\frac{20}{81}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Ans. **B**

$C_1 \begin{cases} P(H) = 2/3 \\ P(T) = 1/3 \end{cases}$; $C_2 \begin{cases} P(H) = 1/3 \\ P(T) = 2/3 \end{cases}$

Now roots of $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ are real & equal

$\therefore D = 0$

$\alpha^2 - 4\beta = 0$

$\alpha^2 = 4\beta$

$\Rightarrow (\alpha,\beta) = (0,0),(2,1)$

$$P(E) = {}^2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2 . {}^2C_0\left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2 . {}^2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{81}$$

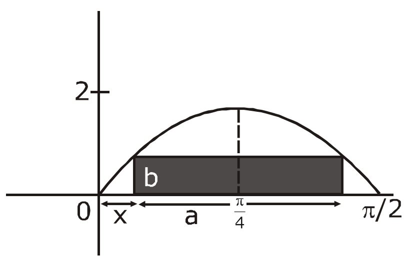
6. Consider all rectangles lying in the region $\left\{(x, y) \in R \times R : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ and } 0 \le y \le 2\sin(2x)\right\}$ and having one side on the x-axis. The area of the rectangle which has the maximum perimeter among all such rectangles, is

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

6. माना सभी आयत क्षेत्र $\left\{(x, y) \in R \times R : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ and } 0 \le y \le 2\sin(2x)\right\}$ में स्थित है तथा x-अक्ष पर एक भुजा रखते है। आयत का क्षेत्रफल जो ऐसे सभी आयतो के बीच में अधिकतम परिमाप रखता है, होगा।

(A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

Ans. C



Let sides of rectangle are a & b

then perimeter = 2a + 2b

p = 2(a + b)

Now $b = 2\sin 2x$ & $b = 2\sin(2x + 2a) \Rightarrow 2x + 2x + 2a = \pi$

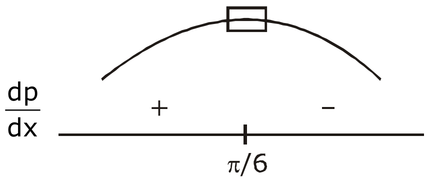
$\left\{x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right\}$

for perimeter max.

P = 2a + 2b

$P = \pi - 4x + 4\sin 2x$

$\frac{dp}{dx} = -4 + 8\cos 2x = 8\left\{\cos 2x - \frac{1}{2}\right\}$



P_{max} at $x = \pi/6$

Now Area $= \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).\left(2\sin 2x\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(2.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

SECTION 2 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX** (06) questions.
- Each question has **FOUR** options. **ONE OR MORE THAN ONE** of these four options(s) is (are) correct answer(s).
- For each question, choose the option(s) corresponding to (all) the correct answer(s).
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :

Full marks : +4 If only (all) the correct option(s) is (are) chosen;
Partial Marks : +3 If all the four options are correct but ONLY three options are chosen;
Partial Marks : +2 If three or more options are correct but ONLY two options are chosen, both of which are correct;
Partial Marks : +1 If two or more options are correct but ONLY one option is chosen and it is a correct option;
Zero Marks : 0 If none of the options is chosen (i.e. the question is unanswered);
Negative Marks : −2 In all other cases.

भाग -2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः (06) प्रश्न शामिल है।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प है। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है (हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सभी सही उत्तरों के अनुरूप विकल्प चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंक पद्धति के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सभी) विकल्प चुने जाते है, (हैं)।
आंशिक अंक : +3 यदि सभी चारों विकल्प सही है, लेकिन केवल तीन विकल्प चुने जाते हैं।
आंशिक अंक : +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही है लेकिन केवल दो विकल्प चुने जाते है, जो कि दोनों ही सही हो।
आंशिक अंक : +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही है, लेकिन केवल एक विकल्प चुना जाता है तथा यह एक सही विकल्प हो।
शून्य अंक : 0 यदि कोई विकल्प नही चुना जाता है (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नही दिया हो)।
ऋणात्मक अंक : −2 अन्य सभी स्थितियों में।

---

7. Let the function $f:R \to R$ be defined by $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$ and let $g:R \to R$ be an arbitrary function. Let $fg: R \to R$ be the product function defined by $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) If g is continuous at x = 1, then fg is differentiable x = 1

(B) If fg is differentiable at x = 1, then g is continuous at x = 1

(C) If g is differentiable at x = 1, then fg is differentiable at x = 1

(D) If fg is differentiable at x =1, then g is differentiable at x = 1

7. माना फलन $f:R \to R$, $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$ के द्वारा परिभाषित है तथा माना $g:R \to R$ एक स्वेच्छ फलन है। माना $fg: R \to R$ गुणन फलन है जो $(fg)(x) = f(x)g(x)$ के द्वारा परिभाषित है। तब निम्न में से कौनसा फलन सत्य है।

(A) यदि g, x = 1 पर संतत है, तब fg, x = 1 पर अवकलनीय है।

(B) यदि fg, x = 1 पर अवकलनीय है, तब g, x = 1 पर संतत है।

(C) यदि g, x = 1 पर अवकलनीय है, तब fg, x = 1 पर अवकलनीय है।

(D) यदि fg, x =1 पर अवकलनीय है, तब g, x = 1 पर अवकलनीय है।

Ans. A,C

$f : R \to R$

(A) $f(x) = x^3 - x^2 + (x-1)\sin x$; $g : R \to R$

$h(x) = f(x).\, g(x) = (x^3 - x^2 + (x-1)\sin x).\, g(x)$

$$h'(1^+) = \lim_{h\to 0} \frac{\left\{(1+h)^3 - (1+h)^2 + h.\sin(1+h)\right\} g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(1 + h^3 + 3h + 3h^2 - 1 - h^2 - 2h + h\sin(1+h)\right) g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(h^3 + 2h^2 + h + h\sin(1+h)\right) g(1+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + \sin(1+h)\right) g(1+h)$$

$$h'(1^-) = \lim_{h\to 0} \frac{\left((1-h)^3 - (1-h)^2 + (-h)\sin(1-h)\right) g(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(-h^3 - 3h + 3h^2 - h^2 + 2h - h\sin(1-h)\right) g(1-h)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + \sin(1-h)\right) g(1-h)$$

as g(x) is constant at x =1

$\therefore g(1+h) = g(1-h) = g(1)$

$h'(1^+) = h'(1^-) = (1 + \sin 1)\, g(1)$

'A' is Correct.

8. Let M be a 3×3 invertible matrix with real entries and let I denote the 3×3 identity matrix. If $M^{-1} = \text{adj}(\text{adj } M)$, then which of the following statements is/are ALWAYS TRUE ?

(A) $M = I$ (B) $\det M = 1$ (C) $M^2 = I$ (D) $(\text{adj } M^2) = I$

8. माना M एक 3×3 का वास्तविक प्रविष्ठियों के साथ त्युत्क्रमणीय आव्युह है। तथा माना I, 3×3 के तत्समक आव्युह को निरूपित करता है। यदि $M^{-1} = \text{adj}(\text{adj } M)$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन हमेशा सत्य होगा –

(A) $M = I$ (B) $\det M = 1$ (C) $M^2 = I$ (D) $(\text{adj } M^2) = I$

Ans. **B,C,D**

$M^{-1} = \text{adj}(\text{adj}(M))$

$(\text{adj } M)M^{-1} = (\text{adj}M)(\text{adj}(\text{adj}(M)))$

$(\text{adj } M)M^{-1} = N.\, \text{adj}(N)$ { Let adj(M) = N }

$(\text{adj } M)M^{-1} = |N|I$

$(\text{adj}M)M^{-1} = |\text{adj}(M)|I_3$

$(\text{adj}M) = |M|^2 .M$ ....(1)

$|\text{adj } M| = ||M|^2.M|$

$|M|^2 = |M^6|.|M|$

$|M|=1$

from equation (1)

adj.M =M (2)

Multiply by matrix M

$M.\text{adj } M = M^2$

$|M|I_3 = M^2$

$M^2 = I$

From (2) adj M =M

$(\text{adj } M)^2 = M^2 = I$

9. Let S be the set of all complex numbers z satisfying $|z^2+z+1| = 1$. Then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) $\left|z + \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ for all $z \in S$ (B) $|z| \le 2$ for all $z \in S$

(C) $\left|z + \frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ for all $z \in S$ (D) The set S has exactly four elements

9. माना S सभी सम्मिश्र संख्याओं z का समुच्च्य है जो $|z^2+z+1| = 1$ को सन्तुष्ट करता है। तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है ?

(A) सभी $z \in S$ के लिए $\left|z+\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$ है।

(B) सभी $z \in S$ के लिए $|z| \le 2$ है।

(C) सभी $z \in S$ के लिए $\left|z+\frac{1}{2}\right| \ge \frac{1}{2}$ है।

(D) समुच्च्य S ठीक चार अव्यव रखता है।

Ans. B,C

$|z^2+ z + 1|= 1$

Let $z^2 + z + 1 = e^{i\theta}$

as $|z^2+ z+ 1| = 1$

$\therefore z^2 + z + 1 - e^{i\theta} = 0$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4+4e^{i\theta}}}{2}$$

$$Z + \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{i\theta}-3}$$

$$Z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(4\cos\theta-3)+i4\sin\theta}$$

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(4\cos\theta-3)^2+(4\sin\theta)^2}\right\}^{1/2}$$

Let $a = (4\cos\theta - 3) + i4\sin\theta$

$|a|=\sqrt{(4\cos\theta-3)^2+16\sin^2\theta}$

$\Rightarrow \sqrt{16\cos\theta^2+9-24\text{Cos}\theta+16\sin^2\theta}$

$|a|= \sqrt{25-24\cos\theta}$

$|a| \in [1,7]$ $\therefore$ $\left|z+\frac{1}{2}\right| \in \left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

$$Z = \frac{-1\pm\sqrt{(4\cos\theta-3)+i\sqrt{4\sin\theta}}}{2}$$

$2Z = -1 \pm \sqrt{(4\cos\theta-3)+i(4\sin\theta)}$

$|2z| \le 1+\sqrt{(25-24\cos\theta)^{1/2}} \Rightarrow |2z| \le 1 + \sqrt{7}$

$|2z| \le 3.4 \Rightarrow |z| \le 1.7$

10. Let x, y and z be positive real numbers. Suppose x, y and z are the lengths of the sides of a triangle opposite to its angles X, Y and Z, respectively. If $\tan\frac{X}{2}+\tan\frac{Z}{2}=\frac{2y}{x+y+z}$,

then which of the following statements is/are TRUE ?

(A) 2Y = X + Z (B) Y = X + Z (C) $\tan\frac{x}{2}=\frac{x}{y+z}$ (D) $x^2 + z^2 - y^2 = xz$

10. माना x, y तथा z धनात्मक वास्तविक संख्याए है। माना X, Y तथा Z क्रमशः एक त्रिभुज की भुजाओं लम्बाईयां है जो इसके कोण x,y तथा z के विपरित है। यदि $\tan\frac{X}{2}+\tan\frac{Z}{2}=\frac{2y}{x+y+z}$ है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) 2Y = X + Z (B) Y = X + Z (C) $\tan\frac{x}{2}=\frac{x}{y+z}$ (D) $x^2 + z^2 - y^2 = xz$

Ans. **B,C**

$$\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{z}{2}=\frac{2y}{x+y+z}$$

$$\frac{\Delta}{s(s-x)}+\frac{\Delta}{s(s-z)}=\frac{2y}{x+y-z}$$

$$\Delta\left\{\frac{2s-x-z}{(s-x)(s-y)}\right\} = y$$

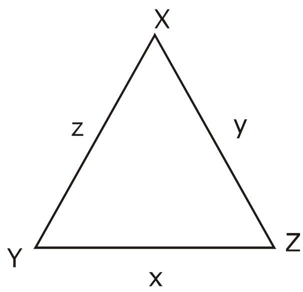
$\Delta = (s - x)(s - z)$

$$1 = \frac{\Delta}{s(s-y)} \Rightarrow \tan\frac{y}{2} = 1$$

y =90°

(B) $\therefore\ \angle y = \angle x + \angle z$

(D) False by Cosine formula



$$\text{(C) } \tan\frac{x}{2} = \frac{\Delta}{s(s-x)} = \frac{\frac{1}{2}xz}{\frac{1}{2}(x+y+z)\frac{1}{2}(y+z-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z}$$

11 Let L_1 and L_2 be the following straight lines.

$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ and $L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Suppose the straight line $L : \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$

lies in the plane containing L_1 and L_2, and passes through the point of intersection of L_1 and L_2. If the line L bisects the acute angle between the lines L_1 and L_2, then which of the following statements is/are TRUE?

(A) $\alpha - \gamma = 3$ (B) $l + m = 2$ (C) $\alpha - \gamma = 1$ (D) $l + m = 0$

11 माना L_1 तथा L_2 निम्न सरल रेखाएं है –

$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ तथा $L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

माना सरल रेखा $L : \frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$,

L_1 तथा L_2, वाले समतल में स्थित है तथा L_1 तथा L_2. के प्रतिच्छेदी बिन्दू से गुजरती है। यदि रेखा L रेखाओ L_1 तथा L_2, के बीच न्यूनकोण को समद्धिभाजित करती है, तब निम्न में से कौनसा कथन सत्य है।

(A) $\alpha - \gamma = 3$ (B) $l + m = 2$ (C) $\alpha - \gamma = 1$ (D) $l + m = 0$

Ans. **A,B**

$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3} = \lambda$

$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} = \mu$

$P(\lambda+1, -\lambda, 3\lambda+1)$ $Q(-3\mu+1, -\mu, \mu+1)$

for point of Intersection

$\lambda + 1 = -3\mu + 1$ $\lambda = \mu$

$\lambda = \mu = 0$

Point of Intesection (1,0,1)

$\therefore \frac{x-\alpha}{\ell} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-\gamma}{-2}$ passes through (1,0,1)

$\frac{1-\alpha}{\ell} = \frac{-1}{m} = \frac{1-\gamma}{-2}$ ...(1)

dr's of $L_1(1, -1, 3)$ dr's of $L_2(-3, -1, 1)$

$\vec{v}_1$ = di's of $L_1\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$; V_2= di's of $L_2\left(\frac{-3}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$

$\vec{V}_1.\vec{V}_2 > 0$

$\therefore$ dr's of $\angle$ bisector of L_1 and L_2

$= \left(\frac{-2}{\sqrt{11}},\frac{-2}{\sqrt{11}},\frac{4}{\sqrt{11}}\right)$

or ℓ : m : (–2) = – 2 : – 2 : 4

= 2 : 2 : – 4

ℓ = m = 1

$\therefore 1 - \alpha = -1 = \frac{1-\gamma}{-2}$

$\alpha = 2$ $\qquad 1 - \gamma = 2$; $\gamma = -1$

12 Which of the following inequalities is/are TRUE?

(A) $\int_0^1 x\cos x\, dx \ge \frac{3}{8}$ (B) $\int_0^1 x\sin x\, dx \ge \frac{3}{10}$

(C) $\int_0^1 x^2\cos x\, dx \ge \frac{1}{2}$ (D) $\int_0^1 x^2\sin x\, dx \ge \frac{2}{9}$

12 निम्न में से कौनसी असमिकाएं सत्य है।

(A) $\int_0^1 x\cos x\, dx \ge \frac{3}{8}$ (B) $\int_0^1 x\sin x\, dx \ge \frac{3}{10}$

(C) $\int_0^1 x^2\cos x\, dx \ge \frac{1}{2}$ (D) $\int_0^1 x^2\sin x\, dx \ge \frac{2}{9}$

Ans. A,B,D

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$\therefore \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!}$

$x\cos x \ge x - \frac{x^3}{2!}$

$$\int_0^1 x\cos x\,dx \geq \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\cos x\,dx \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{6}$$ (A) Correct

similarly

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots$$

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$$

$$x\sin x \geq x^2 - \frac{x^4}{6}$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6\cdot 5}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}\right)_0^1$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \frac{1}{3}-\frac{1}{30}$$

$$\int_0^1 x\sin x\,dx \geq \frac{3}{10}$$ Similarly Check (C) and (D)

SECTION 3 (Maximum Marks : 24)

- This section contains **SIX (06)** questions The answer to each question is a **NUMERICAL VALUE.**
- For each question, enter the correct numerical value of the answer using the mouse and the on-screen virtual numeric keypad in the place designated to enter the answer. If the numerical value has more than two decimal places, truncate/round -off the value to **TWO** decimal places.
- Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme :
  Full marks : +4 If ONLY the correct numerical value is entered;
  Zero Marks : 0 In all other cases.

भाग -3 (अधिकतम अंक : 24)

- इस भाग में छः **(06)** प्रश्न शामिल है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर प्रविष्ट करने के लिए निर्दिष्ट स्थान पर माउस और ऑन–स्क्रीन आभासी (वर्चुअल) संख्यात्मक कीपेड का उपयोग करके उत्तर का सही संख्यात्मक मान दर्ज करे। यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो दो दशमलव स्थानों के मान को छोटा/निकटतम करें।

- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित पद्धति के अनुसार किया जाएगा।
  पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सही संख्यात्मक मान प्रविष्ट किया गया है।
  शून्य अंक : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

---

13 Let m be the minimum possible value of $\log_3\left(3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}\right)$, where y_1, y_2, y_3 are real numbers for which $y_1+y_2+y_3=9.$ Let M be the maximum possible value of $\left(\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3\right)$, where x_1, x_2, x_3 are positive real numbers for which $x_1+x_2+x_3=9$. Then the value of $\log_2\left(m^3\right)+\log_3\left(M^2\right)$ is____

13 माना m, $\log_3\left(3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}\right)$, का न्यूनतम संभावित मान है , जहाँ y_1, y_2, y_3 वास्तविक संख्याएँ है, जिसके लिए $y_1+y_2+y_3=9.$ है। माना M, $\left(\log_3 x_1+\log_3 x_2+\log_3 x_3\right)$ का अधिकतम संभावित मान है, जहाँ x_1, x_2, x_3 धनात्मक वास्तविक संख्याएँ है जिसके लिए $x_1+x_2+x_3=9$ है। तब $\log_2\left(m^3\right)+\log_3\left(M^2\right)$ का मान है।

Ans. **8.00**

$$\frac{3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3}}{3} \geq \left(3^{y_1}.3^{y_2}.3^{y_3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 3.\left(3^{y_1+y_2+y_3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore y_1+y_2+y_3=9$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 3.\left(3^9\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3^{y_1}+3^{y_2}+3^{y_3} \geq 81$$

$m = \log_3 81 = 4$

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq (x_1.x_2.x_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{9}{3} \geq (x_1.x_2.x_3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 27 \geq x_1x_2x_3$$

$M = \log_3(x_1x_2x_3) = \log_3(27) = 3$

$\log_2(m)^3 + \log_3(M)^2 \Rightarrow \log_2(2^6) + \log_3(3^2) = 6 + 2 = 8$

14 Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be a sequence of positive integers in arithmetic progression with common difference 2. Also, let $b_1, b_2, b_3, \ldots$ be a sequence of positive integers in geometric progression with common ratio 2. If $a_1 = b_1 = c,$ then the number of all possible values of c, for which the equality $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ holds for some positive integer n, is____

14 माना $a_1, a_2, a_3, \ldots$ सार्वअन्तर 2 के साथ समान्तर श्रेणी में धनात्मक पूर्णाको का एक अनुक्रम है। माना $b_1, b_2, b_3, \ldots$ सार्व अनुपात 2 के साथ गुणोंतर श्रेणी में धनात्मक पूर्णाको का एक अनुक्रम है। यदि $a_1 = b_1 = c,$ है, तब c के सभी संभावित मानों की संख्या जिसके लिए असमिका $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ कुछ धनात्मक पूर्णांक n के लिए है, होगी ।

Ans. 1.00

$2(a_1+a_2 +......+ a_n) = b_1 + b_2 + ... + b_n$

$2\left[\frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)2\right)\right] = b_1 \frac{(2^n - 1)}{2-1}$

$2n[a_1 + (n - 1)] = b_1(2^n - 1)$

$2na_1 + 2n^2 - 2n = a_1(2^n - 1)$

$a_1 = \frac{2(n^2 - n)}{(2^n - 1 - 2n)} = C_1$ $\qquad \because a_1 = c_1$

$\because C_1 \geq 1$

$\Rightarrow \frac{2(n^2 - n)}{2^n - 1 - 2n} \geq 1$

$2(n^2 - n) \geq 2^n - 1 - 2n$ $\qquad \because n^2 - n \geq 0$ for $n \geq 1$

$= 2n^2 + 1 \geq 2^n$

There for n =1, 2,3,4,5,6

$n = 1 \Rightarrow c_1 = 0$ (×)

$n = 2 \Rightarrow C_1 < 0$ (×)

$n = 3 \Rightarrow C_1 = 12$ (correct)

$n = 4 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$n = 5 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$n = 6 \Rightarrow C_1$ = not Integer

$\therefore C_1 = 12$ for $n = 3$

15 Let $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ be the function defined by

$$f(x) = (3 - \sin(2\pi x))\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

If $\alpha, \beta \in [0,2]$ are such that $\{x \in [0,2] : f(x) \geq 0\} = [\alpha, \beta],$ then the value of $\beta - \alpha$ is____

15 माना $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ फलन है जो

$$f(x)=(3-\sin(2\pi x))\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(3\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$$ के द्वारा परिभाषित है।

यदि $\alpha,\beta\in[0,2]$ इस प्रकार है कि $\{x\in[0,2]: f(x)\ge 0\}=[\alpha,\beta]$, है, तब $\beta-\alpha$ का मान होगा –

Ans. **1.00**

Let $\pi x - \pi/4 = \theta$

$f(x) \ge 0$

$(3 - \sin 2(\theta + \pi/4))\sin\theta - \sin\left[\frac{3\pi}{4}+3\theta+\frac{\pi}{4}\right] \ge 0$

$\Rightarrow 3\sin\theta - \sin\theta\cos 2\theta + \sin 3\theta \ge 0$

$\Rightarrow \sin\theta\,[3 - (1 - 2\sin^2\theta) + 3 - 4\sin^2\theta] \ge 0$

$\Rightarrow \sin\theta\underbrace{\left[5-2\sin^2\theta\right]}_{+ve}\ge 0$

$\therefore \sin\theta \ge 0 \Rightarrow \theta\in[0,\pi]$

$\therefore \pi x - \pi/4 \in [0,\pi]$ $\qquad \because x\in[0,2]$

$\pi x \in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ $\qquad \pi x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$ $\qquad \theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$

$\alpha = 1/4$; $\beta = 5/4$

$\beta - \alpha = 1$

16. In a triangle PQR, let $\vec a=\overrightarrow{QR},\vec b=\overrightarrow{RP}$ and $\vec c=\overrightarrow{PQ}$. If

$|\vec a|=3,\quad |\vec b|=4\quad$ and $\quad\dfrac{\vec a\cdot(\vec c-\vec b)}{\vec c\cdot(\vec a-\vec b)}=\dfrac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}$,

then the value of $|\vec a\times\vec b|^2$ is____

16 एक त्रिभुज PQR में माना $\vec a=\overrightarrow{QR},\vec b=\overrightarrow{RP}$ तथा $\vec c=\overrightarrow{PQ}$ है। यदि

$|\vec a|=3,\quad |\vec b|=4\quad$ तथा $\quad\dfrac{\vec a\cdot(\vec c-\vec b)}{\vec c\cdot(\vec a-\vec b)}=\dfrac{|\vec a|}{|\vec a|+|\vec b|}$

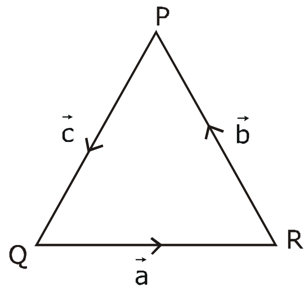
है, तब $|\vec a\times\vec b|^2$ का मान होगा –

Ans. **108.00**

$\vec a+\vec b+\vec c=0$

$$\frac{\vec{a}.\left(\vec{c}-\vec{b}\right)}{\vec{c}.\left(\vec{a}-\vec{b}\right)} = \left[\frac{\left(\vec{b}+\vec{c}\right).\left(\vec{c}-\vec{b}\right)}{\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}\right]$$

$$= \frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$



$$\Rightarrow \frac{c^2 - 16}{9 - 16} = \frac{3}{7} \Rightarrow C^2 = 13$$

$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$a^2 + b^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = c^2 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = -6$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 + \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2 + a^2b^2$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = (3^2)(4^2) - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$

$= 144 - (36) = 108$

17 For a polynomial $g(x)$ with real coefficients, let m_g denote the number of distinct real roots of $g(x)$. Suppose S is the set of polynomials with real coefficients defined by

$$S = \left\{\left(x^2-1\right)^2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

For a polynomial f, let f' and f'' denote its first and second order derivatives, respectively. Then the minimum possible value of $\left(m_{f'} + m_{f''}\right)$, where $f \in S$, is_____

17 एक बहुपद $g(x)$ जिसके वास्तविक गुणांक के लिए माना m_g , $g(x)$ के भिन्न–2 वास्तविक मूलो की संख्या को निरूपित करता है। माना S वास्तविक गुणांक के साथ बहुपदो का समुच्च्य है जो

$$S = \left\{\left(x^2-1\right)^2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

के द्वारा परिभाषित है। एक बहुपद f के लिए, माना f' तथा f'' क्रमशः इसके प्रथम तथा द्वितिय क्रम के अवकलज है, तब $\left(m_{f'} + m_{f''}\right)$, का न्यूनतम संभावित मान होगा। जहाँ $f \in S$, है–

Ans. **5.00**

$f(x) = (x^2 - 1)^2h(x)$; $h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Now, $f(1) = f(-1) = 0$

$\Rightarrow f'(\alpha) = 0, \alpha \in (-1,1)$ [Rolle's Theorem]

Also, $f(1) = f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ has atleast 3 root $-1, \alpha, 1$ with $-1 < \alpha < 1$

$\Rightarrow f''(x) = 0$ will have at least 2 root, say β, γ such that

$-1 < \beta < \alpha < \gamma < 1$ [Rolle's Theorem]

So, $\min\left(m_{f''}\right) = 2$

and we find $(m_{f'} + m_{f''}) = 5$ for $f(x) = (x^2 - 1)^2$

Thus, Ans = 5

18. Let e denote the base of the natural logarithm. The value of the real number a for which the right hand limit $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1}}{x^a}$ is equal to a non-zero real number, is____

18 माना e प्राकत लघुगुणक के आधार को निरूपित करता है। वास्तविक संख्या a का मान जिसके लिए दायी सीमा का मान $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1-x)^{\frac{1}{x}} - e^{-1}}{x^a}$ एक अशून्य वास्तविक संख्या के बराबर है, होगा –

Ans. **1.00**

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\ln(1-x)^{1/x}} - e^{-1}}{x^a} \; ; \; L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} - e^{-1}}{x^a}$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\dots\right)} - e^{-1}}{x^a} \; ; \; L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}.e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\dots\right)} - e^{-1}}{x^a}$$

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left[e^{-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\dots\right)} - 1\right]}{x^a} \; ; \; L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left[\left(1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2}{2!}\dots\right) - 1\right]}{x^a}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\dots\right) + \frac{x\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)^2}{2!}\dots\right)}{x^{a-1}}$$

for Non - Zero limit $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$